CV 复习

2 数字图像基础

简单的成像模型 入射分量 $i(x,y) \in [0,+\infty)$，反射分量 $r(x,y) \in [0,1]$，图像 $f(x,y) = i(x,y)r(x,y) \in [L_{\min}, L_{\max}]$。

3 灰度变换与空间滤波

基本灰度变换函数

图像反转 $s = L - 1 - r$。

对数变换 $s = c\log(1+r)$。

伽马变换 $s = cr^\gamma$。

分段变换 对比度拉伸、灰度级分层、比特平面分层。

直方图均衡化 图像大小 $M \times N$。

归一化直方图 $p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}$。

离散形式 $s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$。

直方图匹配 用于生成具有规定直方图的图像方法。

局部直方图 非重叠区域可能会产生块状效应。

空间滤波 滤波器（核）大小 $m \times n$。$a = \frac{m-1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$

线性空间滤波（空间相关） 满足分配律。$g(x,y) = \sum_{x=-a}^{a}\sum_{y=-b}^{b} w(s,t)f(x+s,y+t)$。

空间卷积 满足交换律、结合律、分配律。$w(x,y)\bigstar f(x,y) = \sum_{y=-b}^{b} w(s,t)f(x-s,y-t)$。

与频率域滤波 卷积是空间域滤波的基础，它等效于频率域中的乘法，反之亦然；空间域中振幅为 A 的冲激，是频率域中值为 A 的一个常数，反之亦然。

平滑空间滤波器

线性 盒状滤波器、低通高斯滤波器（边界常数—复制填充；边界细节—镜像填充）。

非线性 中值滤波器（对椒盐噪声有效）、最大值滤波器、最小值滤波器。

锐化空间滤波器

拉普拉斯算子

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

非锐化遮蔽 $g(x,y) = f(x,y) + k[f(x,y) - \overline{f}(x,y)]$

使用一阶微分 Roberts 交叉梯度算子

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sobel 算子，奇数大小的核，用于边缘缺陷检测

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 频率域滤波

连续变量傅立叶变换

正变换 $F(\mu) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mu t}\mathrm{d}t$

反变换 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mu t}\mathrm{d}\mu$

冲激响应 $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mu t_0}$

冲激串 周期为 ΔT 冲激串的傅立叶变换为周期为 $\frac{1}{\Delta T}$ 的冲激串。

卷积定理 空间域中两个函数的卷积的傅立叶变换，等于频率域中两个函数的傅立叶变换的乘积；反之亦然。$(f\bigstar h)(t) \Leftrightarrow (H\cdot F)(\mu); (f\cdot h)(t) \Leftrightarrow (H\bigstar F)(\mu)$

取样

取样函数 $\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\Delta T)$

取样点 $f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-k\Delta T)\mathrm{d}t = f(k\Delta T)$

傅立叶变换 周期 ΔT 取样函数的傅立叶变换是周期为 $\frac{1}{\Delta T}$ 的周期函数。

取样定理 $\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$ 能够完全由其样本集合复原（μ 表示原始）。奈奎斯特率 $\mu_{\max} = \frac{1}{2\Delta T}$。

混叠 以低于奈奎斯特取样率取样的最终效果是周期重叠，即混叠。混叠不可避免。可以通过平滑输入函数减少高频成分的方法来降低混淆的影响，被称为*抗混叠*，必须在函数被取样之前完成。*莫尔效应*：有时是周期或近似周期成分对场景取样产生的。

复原函数 样本值加权的 sinc 函数的无限和 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\mathrm{sinc}\frac{t-n\Delta T}{\Delta T}$。

单变量离散傅立叶变换（DFT） 有限样本下

DFT $F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/M}$

IDFT $f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ux/M}$ 这些函数都是无限周期的。DFT 的频率分辨率 Δu 与记录的长度 T 成反比；DFT 跨越的频率范围则取决于取样间隔 ΔT。

一维离散卷积定理 $(f\bigstar h)(t) \Leftrightarrow (H\cdot F)(\mu); (f\cdot h)(t) \Leftrightarrow \frac{1}{M}(H\bigstar F)(\mu)$

二变量离散傅立叶变换

DFT $F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

IDFT $f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

二维离散卷积定理 $(f\bigstar h)(t) \Leftrightarrow (H\cdot F)(\mu); (f\cdot h)(t) \Leftrightarrow \frac{1}{MN}(H\bigstar F)(\mu)$

性质 (二维离散傅立叶变换)

平均值	$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{MN}F(0,0)$
平移性	$f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
	$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$
旋转性	$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$
周期性	$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2})$
离散单位冲激	$\delta(x,y) \Leftrightarrow 1; 1 \Leftrightarrow MN\delta(u,v)$
高斯	$A2\pi\sigma^2\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A\mathrm{e}^{-\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\sigma^2}}$

基本滤波公式 $g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u,v)F(u,v)]$ 填充只在空间域进行，将 $H(u,v)$ 用 IDFT 转化为空间域，填充后再用 DFT 转化到频率域。这种做法的问题在于，空间域的不连续可能在频率域中产生*振铃现象*。

低通滤波平滑图像

理想低通滤波器 (ILPF) 有振铃现象。

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \le D_0 \\ 0, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

高斯低通滤波器 (GLPF) 不会有振铃现象。

$$H(u,v) = \mathrm{e}^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

Butterworth LPF(BLPF) 需要用截止频率来控制低频和高频过渡的情况。

$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$

高通滤波锐化图像 $H_{\mathrm{HP}}(u,v) = 1 - H_{\mathrm{LP}}(u,v)$，拉普拉斯算子，非锐化遮蔽，高提升滤波都是可行的。

同态滤波 图像取对数后 DFT 的低频成分与照射相联系，高频成分与反射相联系。由于 $\mathcal{F}\{\ln f(x,y)\} = \mathcal{F}\{\ln i(x,y)\} + \mathcal{F}\{\ln r(x,y)\}$，新图像 $g(x,y) = \mathrm{e}^{i'(x,y)}\mathrm{e}^{r'(x,y)}$

选择性滤波

理想带阻滤波器 (IBRF)

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & C_0 - \frac{W}{2} \le D(u,v) \le C_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

高斯带阻滤波器 (GBRF)

$$H(u,v) = 1 - \mathrm{e}^{-\left[\frac{D^2(u,v)-C_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$$

Butterworth BRF(BBRF)

$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-C_0^2}\right]^{2n}}$$

带通滤波器 $H_{\mathrm{BP}}(u,v) = 1 - H_{\mathrm{BR}}(u,v)$

陷波滤波器 选择性地修改 DFT 的局部区域。陷波滤波器拒绝（或通过）实现定义的关于频率矩形中心的一个邻域的频率。零相移滤波器必须是关于原点对称的。陷波带阻滤波器由高通滤波器乘积构造，

$$H_{\mathrm{NR}}(u,v) = \prod_{k=1}^{Q} H_k(u,v)H_{-k}(u,v)$$

陷波带通滤波器 $H_{\mathrm{NP}}(u,v) = 1 - H_{\mathrm{NR}}(u,v)$

快速傅立叶变换 (FFT) $\mathcal{O}(N^2) \to \mathcal{O}(N\log N)$。

5 图像复原与重建

退化模型 空间域 $g(x,y) = h(x,y)\bigstar f(x,y) + \eta(x,y)$ 或频率域 $G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$

噪声模型 白噪声（傅立叶谱是常量）、高斯噪声、瑞利噪声、伽马噪声、指数噪声、均匀噪声、椒盐噪声、周期噪声。

只存在噪声的复原—空间域滤波　均值滤波器（算术、几何、谐波、逆谐波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(r,c)\in S_{xy}} g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}} g(r,c)^{Q}}$$

$Q>0$ 消除椒噪声细化和模糊暗色区域，$Q<0$ 消除盐噪声，$Q=0$ 算术，$Q=-1$ 谐波），统计排序滤波器（中值、最大值和最小值、中点滤波器—最大与最小的中点、修正阿尔法均值滤波器—去掉最高部分去掉最低部分剩下平均），自适应滤波器。

降低周期噪声—频率域滤波　带阻滤波器：可用来消除周期噪声。带通滤波器：可用来提取噪声模式。陷波（带阻/带通）滤波器：可用来消除/提取周期噪声。最佳陷波滤波器：在一定意义上是最佳的，因为它最小化了复原的估计值的局部方差。

估计退化略。最小均方误差（维纳）滤波、约束最小二乘方滤波、几何均值滤波略。

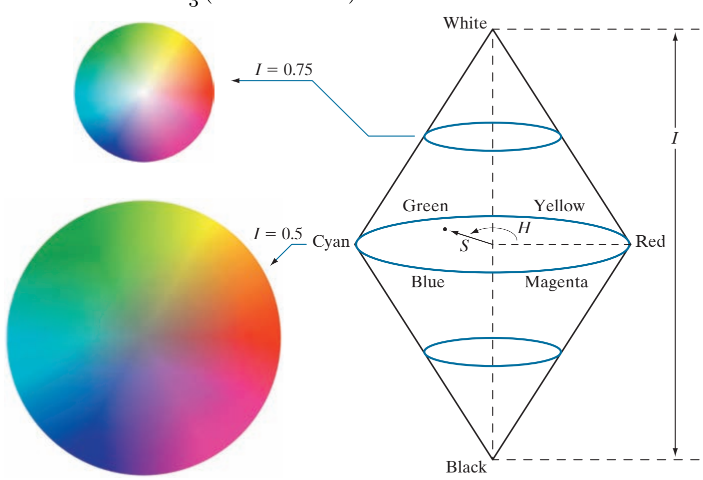
6　彩色图像处理

彩色模型

CMY(K)

$$\begin{aligned}1-R=C&=C(1-K)+K\\1-G=M&=M(1-K)+K\\1-B=Y&=Y(1-Y)+K\\\min(C,M,Y)&=K\end{aligned}$$

HSI　$I=\frac{1}{3}(R+G+B)$

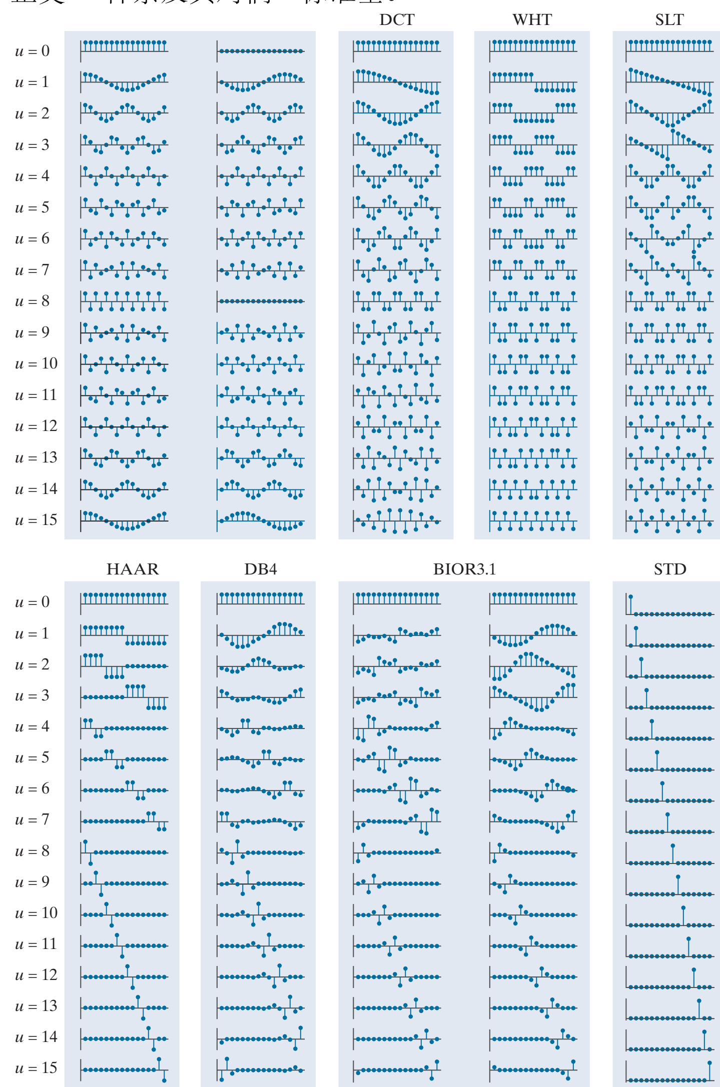


7　小波变换

海森堡盒

$$\sigma_t^2\sigma_f^2\geq\frac{1}{16\pi^2}$$

常见变换基向量　傅立叶基（实部和虚部）、离散余弦基、Walsh-Hadamard 基、斜坡基、Haar 基、Daubechies 基、双正交 B 样条及其对偶、标准基。



二维图像变换　r 和 s 分别为正、反变换核。

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)r(x,y,u,v)$$

$$f(x,y)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}T(u,v)s(x,y,u,v)$$

基图像

$$\mathbf{F}=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)\mathbf{S}_{u,v}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是二维图像，$\mathbf{S}_{u,v}$ 称为基图像。如果底层的 $s(x,y,u,v)$ 是实值的、可分离的、对称的，则直接相乘 $\mathbf{S}_{u,v}=\mathbf{s}_u\mathbf{s}_v^\top$。

Walsh–Hadamard 变换　哈达玛

$$\mathbf{A}_\mathrm{W}=\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{H}_N,\quad H_{2N}=\begin{bmatrix}H_N & H_N\\ H_N & -H_N\end{bmatrix}$$

Haar 变换　哈尔

$$A_H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad A_H=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & & \\ & & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

多分辨率展开

对尺度函数要求（MRA 要求）　尺度函数对其整数平移是正交的；低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的子空间内；唯一对所有 V_j 通用的函数是 $f(x)=0$；任何函数都可以按任意精度表示。

快速小波变换（FWT）　将函数分解为尺度和小波函数之和，$\mathcal{O}(N)$。

小波包　更好地控制时间—频率平面的划分（得到更小的高频带宽），$\mathcal{O}(N\log_2 N)$。

8　图像压缩和水印

相对数据冗余　$R=1-\frac{1}{C}$，C 是压缩率，$C=\frac{b}{b'}>1$。主要有：编码冗余、空间和时间冗余、无关信息。

熵　$H=-\sum_{j=1}^{J}P(a_j)\log P(a_j)$

灰度信源的熵　$\tilde{H}=-\sum_{k=0}^{L-1}p_r(r_k)\log_2 p_r(r_k)$

Shannon 第一定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_\mathrm{avg}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}l(r_k)p_r(r_k)}{n}=H$$

数据压缩分类

无损压缩　包括熵编码、无损预测编码、字典编码。

有损压缩　包括有损预测编码、变换编码、小波编码。

无损压缩编码

Huffman 编码

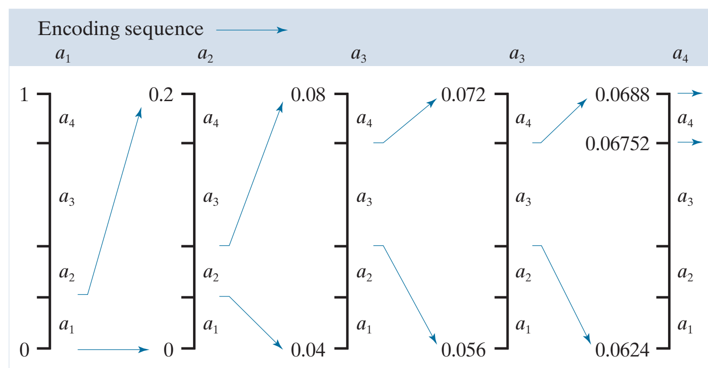
Golomb 编码　$G_m(n)$：1. 形成商 $\lfloor n/m\rfloor$ 的一元编码（q 个 1 一个 0）2. $k=\lceil\log_2 m\rceil, c=2^k-m, r=n \mod m$，

$$r'=\begin{cases}r\text{截断至}k-1\text{比特}, & 0\le r<c\\ r+c\text{截断至}k\text{比特}, & \end{cases}$$

连接 1. 和 2. 的结果。

为计算 $G_4(9)$，$\lfloor 9/4\rfloor=2=(110)_2$；$k=\lceil\log_2 4\rceil=2, c=2^k-4=0, r=9 \bmod 4=1=(0001)_2$，$r'$ 是 $r+c$ 截断 k 比特的结果（因为 $r\ge c$；否则应当为 r 截断至 $k-1$ 比特）；连接后得到 11001。

算术编码　依照概率，不是一一对应。



LZW 编码　无误差压缩方法，字典。GIF、TIFF。

行程编码（RLE）　去除像素冗余，用行程的灰度和行程的□度代替行程本身。BMP、JPEG、M-JPEG。

基于符号　JBIG2

比特平面　涉及格雷码：$g_i=a_i$ 异或 $a_{i+1}, g_{m-1}=a_{m-1}$，连续码字只有一个比特位置不同，小灰度变化不太可能影响全部比特平面。JBIG2、JPEG-2000。

有损压缩编码　略。

9　形态学处理

腐蚀与膨胀

腐蚀　$A\ominus B$

膨胀　$A\oplus B$

对偶性　$(A\ominus B)^c=A^c\oplus\hat{B}$; $(A\oplus B)^c=A^c\ominus\hat{B}$

开与闭运算

开运算　$A\circ B=(A\ominus B)\oplus B$ 平滑轮廓、断开狭颈、消除细长突出物

闭运算　$A\bullet B=(A\oplus B)\ominus B$ 弥合沟壑、消除小孔、填补缝隙

对偶性　$(A\circ B)^c=(A^c\bullet\hat{B}),(A\bullet B)^c=(A^c\circ\hat{B})$

性质 $A\circ B\subseteq A; C\subseteq D\Rightarrow C\circ B\subseteq D\circ B; (A\circ B)\circ B = A\circ B; A\subseteq A\bullet B; C\subseteq D\Rightarrow C\bullet B\subseteq D\bullet B; (A\bullet B)\bullet B = A\bullet B$

击中击不中变换 $I\circledast B_{1,2} = (A\ominus B_1)\cap(A^c\ominus B_2)$ 形状检测。

基本形态学算法

边界提取 $\beta(A) = A-(A\ominus B)$

孔洞填充 $X_k = (X_{k-1}\oplus B)\cap I^c$，迭代结束条件 $X_k = X_{k-1}$，如果不加以控制，膨胀将填充整个区域。

提取连通分量 $X_k = (X_{k-1}\oplus B)\cap I\downarrow X_k = X_{k-1}$。

凸包 粗略（使用了腐蚀）：$X_k^i = (X_{k-1}^i\circledast B^i)\cup X_{k-1}^i\downarrow X_k^i = X_{k-1}^i$，$C(A) = \bigcup_{i=1}^M D_i$。

细化 $A\otimes B = A-(A\circledast B)$，不破坏连通性的前提。

粗化 $A\odot B = A\cup(A\circledast B)$，不合并对象的前提。

骨架 $S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A), S_k(A) = (A\ominus kB)-(A\ominus kB)\circ B$

裁剪（Pruning） 骨架后处理，清除某些寄生成分。

形态学重建 标记图像 F 包含重建的起点，模板图像 G 约束重建，结构元 B 用于定义连通性。

测地膨胀 $D_G^{(1)}(F) = (F\oplus B)\cap G$ *Geodesic Dilation*

测地腐蚀 $E_G^{(1)}(F) = (F\ominus B)\cup G$ *Geodesic Erotion*

膨胀形态学重建 $R_G^D(F) = D_G^{(k)}(F)\downarrow D_G^{(k)}(F) = D_G^{(k+1)}(F)$

腐蚀形态学重建 $R_G^E(F) = E_G^{(k)}(F)\downarrow E_G^{(k)}(F) = E_G^{(k+1)}(F)$

重建开运算 $O_R^{(n)}(F) = R_F^D(F\ominus nB)$ 精确地恢复腐蚀后保留目标的形状。

重建闭运算 $C_R^{(n)}(F) = R_F^E(F\oplus nB)$ 在背景像素上执行。

填充孔洞自动算法

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-I(x,y), & (x,y)\text{在边框上} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, H = [R_{I^c}^D(F)]^c$$

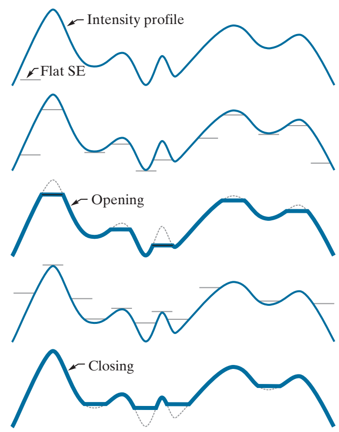
边界清除 $X = I-R_I^D(F)$ 目标不接触边界。

灰度腐蚀和膨胀

灰度腐蚀 $[f\ominus b](x,y) = \min_{(s,t)\in b}\{f(x+s,y+t)-b_N(s,t)\}$

灰度膨胀 $[f\oplus b](x,y) = \max_{(s,t)\in b}\{f(x+s,y+t)+\hat{b}_N(s,t)\}$

灰度开与闭运算 用剖面解释，性质上将 $\subseteq$ 换成 $\hookleftarrow$ 符号，表示既是子集而且每个点都比后者小



形态学梯度 $g = (f\oplus b)-(f\ominus b)$

顶帽变换和底帽变换 用一个结构元从图像中删除目标，而不是拟合将被删除的目标。

顶帽变换 $T_{\text{hat}}(f) = f-(f\circ b)$ 暗背景上的亮目标

底帽变换 $B_{\text{hat}}(f) = (f\bullet b)-f$ 亮背景上的暗目标

图像分割、特征提取、图像模式分类略。